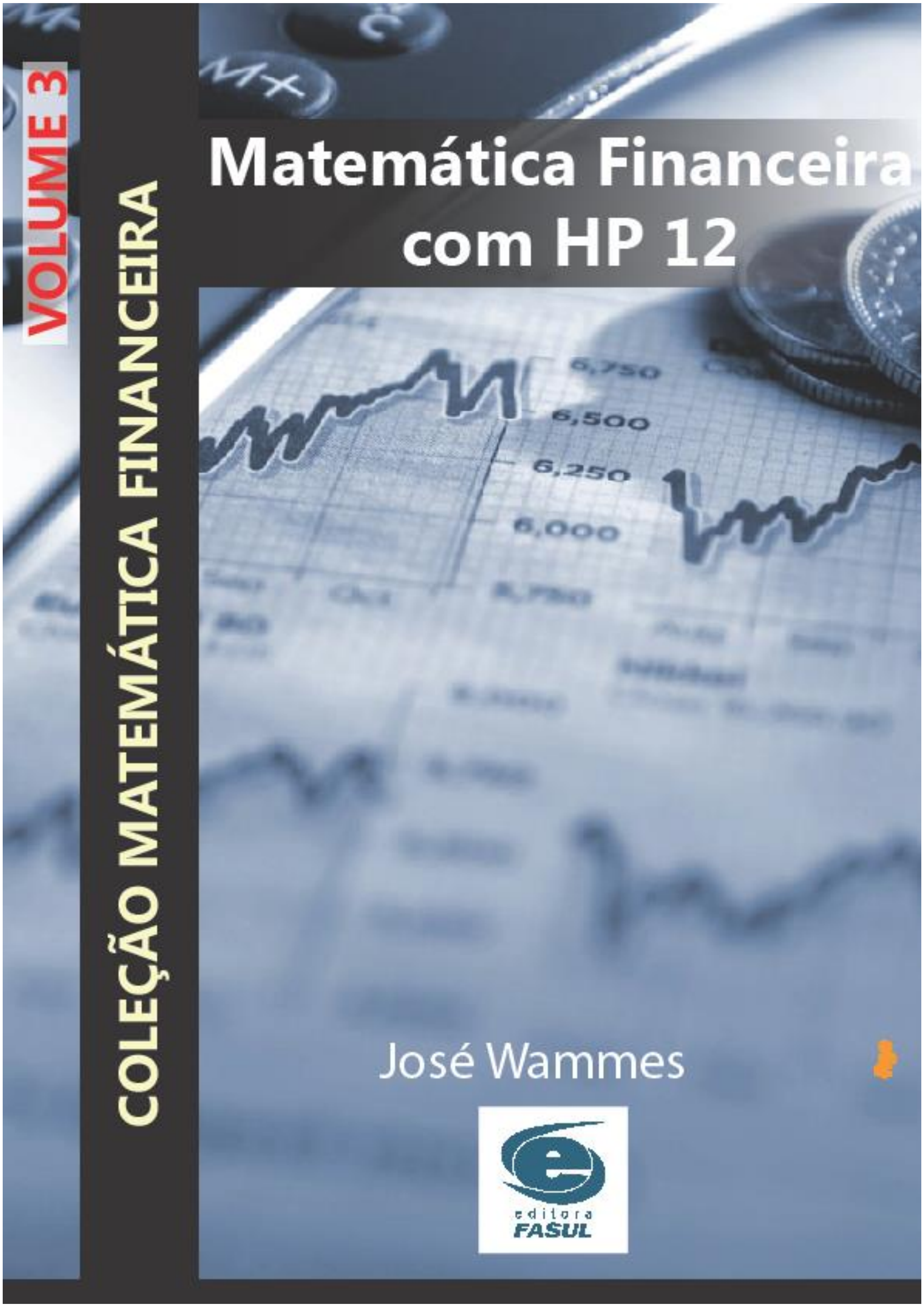
VOLUME 3
COLEÇÃO MATEMÁTICA FINANCEIRA
Matemática Financeira
com HP 12
6,750
6,500
6,250
6,000
José Wammes
editora
FASUL

Coordenação Editorial: Osmar Antonio Conte

Editoração: José Wammes

Ficha Catalográfica: Rute Teresinha Schio - CRB 1095

W243 Wammes, José

Matemática financeira com a utilização da calculadora HP12c / José Wammes. – Toledo: Fasul, 2012.
54 p.

1. Matemática financeira. 2. HP 12C. I. Wammes, José.

CDD 658.15

José Wammes
Av. Ministro Cirne Lima, 2565
CEP 85903-590 – Toledo – Paraná
Tel. (45) 3277-4000 - e-mail: josewammes@ig.com.br

Impresso no Brasil – 2013

Uma conversa com o usuário e leitor da obra:

Há disponíveis no mercado literário inúmeras obras de matemática financeira. E, diga-se, obras de excelente qualidade, de modelos bem estruturados, de elaboração e resolução refinada, com a utilização de gráficos e fórmulas matemáticas que alargam o horizonte dos acadêmicos quanto a captura do conhecer.

Na nossa atividade diária de sala de aula, percebemos uma carência de obras que agreguem, também, o manuseio da calculadora HP 12C na resolução dos modelos apresentados.

Não é pretensão do autor da obra, demonstrar as potencialidades da calculadora. Mas, sim, como utilizá-la para auxílio na resolução dos modelos e enunciados ou situações as mais diversas.

Pretende-se partir de situações corriqueiras, como aquelas que o acadêmico se depara em sala de aula, demonstrando, passo a passo, com o auxílio da calculadora, a encontrar a resolução correta.

Como se depreende, trata-se de algo modesto, singelo, de alcance direto, sem maiores rodeios. O pressuposto metodológico que embasa a obra é o de construir o aprendizado pela prática na resolução dos modelos apresentados.

Tenho a certeza que, acompanhando a resolução dos modelos aqui apresentados, o acadêmico terá plenas condições de uso e extração dos resultados que almeja diante dos inúmeros desafios que irá se deparar na sua vida acadêmica, profissional ou pessoal.

Sucesso e êxito é o que posso lhe desejar.

José Wammes

SUMÁRIO

1.0 DA CALCULADORA HP 12C

A calculadora financeira **HP 12C** dispensa apresentação e comentários maiores. Líder em seu segmento, amplamente utilizada nos meios acadêmicos e profissionais, porém, ainda, a ser descoberta por uma grande parte da comunidade acadêmica, notadamente discentes.

A calculadora **HP 12C** é uma ferramenta atual, moderna, servindo a diversas áreas do conhecimento, facilmente encontrada em diversas organizações, desde escritórios de advocacia, instituições financeiras, empresas de consultoria, perícias, cálculos, órgãos públicos, profissionais liberais e estudantes das mais diversas áreas.

Seu alto desempenho, grande maleabilidade e praticidade, a facilidade de manuseio, sua precisão e amplitude de cálculos é a que faz tão requisitada e escolhida por uma vasta gama de usuários e profissionais.

Sua operacionalização é simples e fácil, necessitando apenas de um pequeno treinamento, aliado ao uso contínuo, possibilitará com que você usuário, extraia todo o seu potencial de soluções.

1.1 OBJETIVO

Que, com o presente material, o usuário da calculadora **HP12C** possa realizar cálculos (aritméticos e algébricos, percentuais, estatísticos e financeiros) de forma simples e direta.
Na obra, não se busca examinar cada função ou tecla da calculadora, esmiuçando-as. Como já expresso anteriormente, a obra tem um cunho mais direto e prático. Singelo.

2.0 EXPLORANDO A HP 12C

Necessário se faz uma pequena apresentação, de teclas e funções primordiais, para uma melhor evolução e acompanhamento. Maior aprofundamento de cada tecla e função sugere-se recorrer às bibliografias citadas na obra.

2.1 LIGANDO E DESLIGANDO

$\boxed{\textbf{ON}}$

Liga e desliga a calculadora. Após breve intervalo de tempo sem utilização, a mesma se desligará automaticamente.

2.2 AUTO TESTE

Ao iniciar seu uso, quando da aquisição, para confirmar seu perfeito funcionamento, recomenda-se o **auto teste**. Como efetuá-lo? Com a calculadora desligada, pressiona-se a tecla X e ON soltando-se inicialmente a tecla ON e, em seguida, a tecla X devendo aparecer no visor:

-8,	8,	8,	8,	8,	8,	8,	8,	8 ,	8,	8,

USER f g BEGIN GRAD D.MY C PRGM

2.3 POSICIONAMENTO DA VÍRGULA E PONTO DECIMAL

Pode-se optar, para separar casas decimais, o ponto ou a vírgula. Para tanto, com a calculadora desligada, pressiona-se a tecla . e a tecla ON soltando-se inicialmente a tecla ON e, em seguida, a tecla .

2.4 TECLAS DE FUNÇÕES AUXILIARES

f

Tecla auxiliar utilizada para efetuar cálculos em que se requer o uso das funções sobrescritas em amarela, de cada tecla da calculadora.

Essa tecla também é utilizada para fixação de casas decimais. Para isso, basta pressioná-la e optar pelo número de casas decimais que se quer, limitada a nove.

g

Tecla auxiliar utilizada para efetuar cálculos em que se requer o uso das funções subscritas em azul, de cada tecla da calculadora.

ENTER

Tecla utilizada para entrada da primeira parcela, número, data ou dado que será utilizado em operações seqüenciais ou, não.

2.5 REGISTRADORES OPERACIONAIS OU PILHAS

A calculadora **HP 12C** possui quatro registradores, que são utilizados como armazenadores de dados durante o desenvolvimento dos cálculos. Esses registradores são denominados de **X, Y, Z** e **T**.

Os registradores **X** e **Y** são os registradores operacionais da calculadora e os registradores **Z** e **T** são os registradores de reserva.

Através de um pequeno exemplo, como (5 – 2), o entendimento ficará fácil.

T	0	0	0	0	**REGISTRADORES DE RESERVA**
Z	0	0	0	0	
Y	0	5	5	0	**REGISTRADORES OPERACIONAIS**
X	5	5	2	3	
TECLAS	**5**	**ENTER**	**2**	**-**	

Observemos o que se sucede em um cálculo em série, como:

$$\frac{(7 \times 2) + (6 - 2)}{6}$$

T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Z	0	0	0	0	0	14	14	0	0	0	0
Y	0	7	7	0	14	6	6	14	0	18	0
X	7	7	2	14	6	6	2	4	18	6	3
TECLA	**7**	**ENTER**	**2**	**X**	**6**	**ENTER**	**2**	**-**	**+**	**6**	**÷**

A linha do “**X**” é a linha do visor da **HP 12C.**

R▼

Permite um giro completo da pilha operacional, de forma a se visualizar os dados constantes nas quatro pilhas, quais sejam **X, Y, Z** e **T**.

x <> y

Esta tecla possibilita trocar (Intercambiar) os registros das memórias **X** e **Y,** invertendo os dados de ambas as pilhas, ou seja, o registro contido em uma memória passa para a outra e vice-versa.

2.6 MEMÓRIAS - REGISTRADORES

A **HP 12C** possui ao todo 25 memórias ou registradores, denominadas de R0 a R9 e R.0 a R.9 e mais cinco referente às funções financeiras, representadas pelas teclas

n **i** **PV** **PMT** **FV**

As memórias estão distribuídas em 5 + 7 + 13, totalizando 25.

Cinco, são as financeiras, já descritas acima. Sete, são as memórias do usuário, compreendendo as teclas numéricas 0,1,2,3,4,5,6 (RO a R6). Destas memórias, podemos efetuar cálculos algébricos diretos com a 0,1,2,3,4 (R0 a R4) conforme descrito em operações com memórias, abaixo. Nas memórias 5 e 6 (R5 e R6) , apenas armazenamos dados, não sendo possível tais cálculos diretos.

As treze memórias restantes, de R7 a R9 e R.0 a R.9 são as de programação.

Caso a **HP 12C** contenha programas, a quantidade de memórias – registradores serão alterados, porém, no mínimo, restarão sete memórias – registradores.

A exceção das cinco memórias financeiras acima, as demais para serem utilizadas requerem o uso da função **STO** .

Essa função possibilita que armazenemos valores nas memórias para futura utilização dos mesmos, em cálculos simples ou seqüenciais. A recuperação dos valores armazenados dá-se através do uso da função **RCL**.

O valor recuperado será exibido no visor, pronto para o cálculo que se deseja sem, no entanto, alterar o valor armazenado na memória original, de onde se recuperou o referido dado. Desejando-se anular o valor de uma memória específica, introduz-se o algarismo zero na mesma.

No entanto, desejando-se limpar todas as memórias ou registradores, inclusive os financeiros e os da pilha operacional utilizam-se a seguinte seqüência de teclas:

f CLEAR REG

Caso queira-se apagar apenas os dados que aparecem no visor, deverá ser utilizada a tecla Clx (CLEAR x, limpeza do registrador x, o do visor).

2.7 ARMAZENAMENTO DE NÚMEROS OU DADOS.

Para "guardarmos" um número ou dado, podemos nos utilizar das diversas memórias que a calculadora oferece. Entretanto, utiliza-se em situação de rotina de cálculos, poucas das memórias ofertadas, visto que o recurso da pilha operacional (**X, Y, Z** e **T**) acaba por atender as necessidades mais imediatas, em face da recuperação automática dos dados ali depositados, facilitando o desencadeamento de cálculos em série.

Armazenando números e dados nas memórias R0 a R9 e R.0 a R.9:

Número	Memória	Número	Memória
05	STO 0	100	STO . 0
10	STO 1	110	STO . 1
20	STO 2	120	STO . 2
30	STO 3	130	STO . 3
40	STO 4	140	STO . 4
50	STO 5	150	STO . 5
60	STO 6	160	STO . 6
70	STO 7	170	STO . 7
80	STO 8	180	STO . 8
90	STO 9	190	STO . 9

Recuperando números e dados nas memórias R0 a R9 e R.0 a R.9:

Memória	Número	Memória	Número
RCL O	05	RCL . O	100
RCL 1	10	RCL . 1	110
RCL 2	20	RCL . 2	120
RCL 3	30	RCL . 3	130
RCL 4	40	RCL . 4	140
RCL 5	50	RCL . 5	150
RCL 6	60	RCL . 6	160
RCL 7	70	RCL . 7	170
RCL 8	80	RCL . 8	180
RCL 9	90	RCL . 9	190

O mesmo se sucede com as funções financeiras,

n i PV PMT FV

Tecla-se o número desejado e pressiona-se diretamente na tecla respectiva para armazenamento. Para recuperar o dado, basta pressionar RCL seguido da variável desejada.

2.8 OPERAÇOES COM A MEMÓRIA

Podemos realizar operações algébricas com um dado do visor e o contido em determinada memória, armazenando o resultado nesta mesma memória, sem afetar o número do visor, numa única seqüência de cálculos.

Exemplo: Armazenemos na memória STO 1 o valor 100. Em seguida, façamos a divisão deste valor por 25.

100 STO 1 25 STO ÷ 1

No visor, permanece o último dado informado, 25, porém na memória STO 1, já está armazenado o novo valor (4) resultante da operação acima indicada. Para acessar o resultado, devemos pressionar RCL 1 ► **4.**

Lembrando que operações com a memória somente são possíveis com os dados armazenados nas memórias *R0 a R4*. Para as demais, o acesso é bloqueado face necessidade de disponibilizar espaço para operações de programação, gerando situação de erro (ERROR 4).

3.0 OPERAÇOES ALGÉBRICAS

Após esta breve apresentação de situações operacionais com a calculadora, já podemos iniciar cálculos com a utilização da mesma.

Dentro do possível, antes de cada situação de cálculo far-se-á uma breve apresentação teórica do assunto para complementar o algoritmo de cálculo em demonstração.

Neste tópico, exercitaremos o aprendizado através de exemplos práticos e exercícios propostos, por entendermos ser a forma mais eficaz de assimilação e aprendizagem.

Antes, porém, relembrando algumas regras básicas de sinais para operações algébricas:

MULTIPLICAÇÃO **DIVISÃO**

+	.	+	=	+		+	÷	+	=	+
-	,	-	=	+		-	÷	-	=	+
+	.	-	=	-		+	÷	-	=	-
-	.	+	=	-		-	÷	+	=	-

Resumindo: Sinais iguais, resultado positivo; sinais diferentes, resultado negativo.

SUBTRAÇÃO E ADIÇÃO:

Se os números tiverem o mesmo sinal, adicionam-se os valores absolutos e atribui-se o sinal comum.

Entretanto, caso tenham sinais contrários, subtraem-se os valores absolutos e atribui-se o sinal do número de maior valor absoluto.

USO DE PARÊNTESES:

Quando precedido de sinal positivo, retiram-se os parênteses e conservam-se os sinais dos números que estão em seu interior.

Porém, se precedido de sinal negativo, retiram-se os parentes e trocam-se os sinais dos números que estão no seu interior.

Utilizando a **HP 12C**, resolva os modelos:

a)	(9 + 4 – 6)		**d)**	(18 ÷ 3)
b)	(-10 + 25 + 52 – 37)		**e)**	(14 x 3)
c)	(70 ÷ 5)		**f)**	(45,70 x 21,881838)

<u>**RESOLUÇÃO**</u>:

a)

f	**CLEAR**	**REG**	**f**	2

9	**ENTER**	**4**	**+**	**6**	**-**	⇨	**+ 7,00**

b)

f	**CLEAR**	**REG**	**f**	2

10	**CHS**	**ENTER**	**25**	**+**	**52**	**+**	**37**	**-**	⇨	**+ 30,00**

c)

f	**CLEAR**	**REG**	**f**	2

70	**ENTER**	**5**	**÷**	⇨	**+ 14,00**

d)

f	**CLEAR**	**REG**	**f**	2

18	**ENTER**	**3**	**÷**	⇨	**+ 6,00**

e)

f	CLEAR	REG	f	2

14	ENTER	**3**	x	⇨	**+ 42,00**

f)

f	CLEAR	REG	f	2

45,70	ENTER	**21,881838**	x	⇨	**+ 1.000,00**

<u>EXERCÍCIOS PROPOSTOS</u>:

Item	Proposta	Resposta
a	(6 x 4 + 8) ÷ (8 + 10 – 2)	2,00
b	9,41(5,42)	51,00
c	1.555,74 ÷ 333,77	4,66
d	(3 + 0,87654) ÷ (2 x 0,54321)	3,57
e	1 ÷ 3	0,33
f	- (-8 – 6 – 4 – 2)	+ 20,00
g	(-20 – 5 + 85 –50)	10,00
h	(1 + 3 + 5) ÷ (5 – 3 – 1)	9,00
i	(14 x 2 x 3,45) ÷ (5,15 x 2,18)	8,60

4.0 OPERAÇOES COM LOGARÍTMOS

A **HP 12C** nos fornece os logaritmos naturais ou neperianos, de forma direta, sem recorrermos a artifícios ou mudança de base. Neste caso, apenas digitamos o antilogaritmo ou o número do qual queremos extrair o logaritmo natural ou neperiano e pressionamos a tecla auxiliar **g** e, na sequência, a tecla **LN** No caso de operarmos com logaritmos decimais ou base 10 ($\log_{10}$), necessitamos de um pequeno artifício, que consiste em extrairmos o logaritmo neperiano e, na seqüência, extrairmos o Ln de 10 e dividir um pelo outro, o que gera a mudança de base de neperiano para decimal.

Antes, porém, vale recordar algumas pequenas, mas importantes regras sobre operações algébricas com os logaritmos.

4.1 PROPRIEDADES

$Log_a\ 1 = 0$	O logaritmo de 1 é zero
$Log_a\ a = 1$	O logaritmo da própria base é 1
$Log_a\ a^m = m$	O logaritmo de uma potência da base é o expoente

4.2 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS

$Log_a\ (b\ .\ c)$	=	$Log_a\ b + Log_a\ c$
$Log_a\ b\ /\ c$	=	$Log_a\ b\ -\ Log_a\ c$
$Log_a\ b^m$	=	$m\ Log_a\ b$
$Log_a\ \sqrt[n]{b}$	=	$Log_a\ b\ /\ n$

Com o auxílio da calculadora HP 12C, resolver as situações propostas a seguir:

Item	Situação	Resolução			Resultado
a	LN 100	100	g	LN	4,61
b	LN 10	10	g	LN	2,30
c	LN 155	155	g	LN	5,04
d	LN 5000	5000	g	LN	8,52
e	LN 15555	15555	g	LN	9,65
f a)	LN 2013	2013	g	LN	7,61
b) g	LN 2	2	g	LN	0,69

h	Log 100	100	g	LN		
		10	g	LN	÷	2,00
i	Log 10	10	g	LN		
		10	g	LN	÷	1,00
j	Log 2	2	g	LN		
		10	g	LN	÷	0,30

5.0 PORCENTAGEM (%)

O conceito de porcentagem está estritamente ligado ao de regra de três simples direta. Porcentagem, nada mais é do que a comparação em relação a 100, ou seja, é o cálculo baseado em cada cem partes de um número.

O número que sofre a ação da porcentagem denomina-se **PRINCIPAL** ou **CAPITAL** e o número que resulta, chama-se **TAXA** e representa-se seguido do sinal **%.**

Sua operacionalização dá-se através do método algébrico, utilizando-se para isto de fórmulas ou através do método aritmético, utilizando-se regra de três.

5.1 FÓRMULA

A fórmula para o cálculo de porcentagem é expressa por:

$$\boxed{P = \frac{C\ .\ i}{100}}$$

Onde:

P	C	i
Porcentagem	**Capital ou Principal**	**taxa**

Na **HP 12C**, nos valemos, para cálculos de porcentagem, de três teclas, quais sejam:

% Fornece-nos o percentual de um número, direto.

Δ% Fornece-nos o incremento ou variação percentual entre dois números ou valores.

%T Utilizado quando de operações de adição e subtração de parcelas, para determinação de cada qual no total resultante. Ou, também, para calcular o percentual sobre um total.

Utilizando a **HP 12C**, resolver:

Item	Situação	Item	Situação
a	5% de 500	**d**	27,50% de 2400
b	0,38% de 1000	**e**	8,50% de 240
c	0,50% de 100	**f**	50% de 200

RESOLUÇÃO:

f	CLEAR	REG

Item	Resolução				Resposta
a	500	ENTER	5	%	25,00
b	1000	ENTER	0,38	%	3,80
c	100	ENTER	0,50	%	0,50
d	2400	ENTER	27,50	%	660,00
e	240	ENTER	8,50	%	20,40
f	200	ENTER	50	%	100,00

Quais as diferenças percentuais entre:

Item	Situação	Item	Situação
a	150 e 100	**e**	4,00 e 2,90
b	100 e 150	**f**	4554,05 e 13254,67
c	1 e 2	**g**	500000 e 425700
d	220 e 240	**h**	0,50 e 0,75

RESOLUÇÃO:

f	CLEAR	REG

Item	Resolução				Resposta
a	150	ENTER	100	Δ%	**-** 33,33
b	100	ENTER	150	%	50,00
c	1	ENTER	2	%	100,00
d	220	ENTER	240	%	9,09

e	4	**ENTER**	2,90	**%**	- 27,50
f	4554,05	**ENTER**	13254,67	**%**	191,05
g	500000	**ENTER**	425700	**%**	- 14,86
h	0,50	**ENTER**	0,75	**%**	50,00

Efetue a soma das parcelas e a participação de cada parcela no total:

Item	Situação	Item	Situação
a	100 + 200 + 300	d	555 + 1010 + 2853
b	1500 + 3000 + 4500	e	300+200+100
c	1 + 2 + 3	f	Qual o % entre 8893,35 e 844,87?

RESOLUÇÃO:

f	**CLEAR**	**REG**

Item	Resolução					
a	100	**ENTER**	200	**+**	300	**+**
	100	**%T**	16,67	**CLx**		
	200	**%T**	33,33	**CLx**		
	300	**%T**	50,00	**CLx**		
b	1500	**ENTER**	3000	**+**	4500	**+**
	1500	**%T**	16,67	**CLx**		
	3000	**%T**	33,33	**CLx**		
	4500	**%T**	50,00	**CLx**		
c	1	**ENTER**	2	**+**	3	**+**
	1	**%T**	16,67	**CL**		

	2	%T	33,33	CLx		
	3	%T	50,00	CLx		
d	555	ENTER	1010	+	2853	+
	555	%T	12,56	CLx		
	1010	%T	22,86	CLx		
	2853	%T	64,58	CLx		
e	300	ENTER	200	+	100	+
	300	%T	50,00	CLx		
	200	%T	33,33	CLx		
	100	%T	16,67	CLx		
f	8893,35	ENTER	844,87	%T	9,50	

Exercícios Propostos:

a) Calcular 6% de $ 545,00 **Resposta: $ 32,70**

b) Numa cidade de 8000 habitantes, 44% são crianças. Quantos não estão neste grupo? **Resposta: 4480**

c) Numa unidade militar com 5000 pessoas, 1250 são do sexo feminino. Percentualmente, quantas são deste grupo? **Resposta: 25,00%**

d) Uma duplicata de $ 800,00 que sofre um desconto de 4% terá que valor líquido? **Resposta: $ 768,00**

e) No início do ano, depositei $ 54,25. No final do mesmo ano, verifiquei que o meu saldo era de $ 62,39. Quanto % aumentou o meu saldo? **Resposta: 15,00%**

f) Comprei um sapato que estava anunciado por $ 57,00 a vista. Após negociar com o lojista, obtive um desconto e paguei $ 55,00 pelo sapato. De quanto, em %, foi o desconto obtido? **Resposta: 3,51%**

g) Três amigos resolvem se cotizar e compram um presente. O primeiro entra com $ 18,50; o segundo, com $ 24,00 e o terceiro, com $ 17,50. Pede-se: 1) Qual o valor do presente; 2)

Qual a participação % de cada um no “bolo”? **Resposta: 1) $ 60,00 2) 30,83%; 40,00% e 29,17%.**

h) Resgato um título do governo, após cinco anos, por $ 10.000,00 e pago de Impostos $ 1.250,00 Qual o percentual pago de impostos sobre o resgate? **Resposta: 12,50%**

i) Tenho dois investimentos. No “a”, possuo $ 5.500,00 e no “b”, $ 4.500,00. Qual o percentual que mantenho em cada um? **Resposta: “a” = 55,00%; “b” = 45,00%**

6.0 POTENCIAÇÃO

O assunto em referência é de extrema importância em matemática financeira, visto que seu conhecimento e domínio são imprescindíveis para operações de cálculos de taxas de juros equivalentes em regime exponencial (composto, capitalizado).

Assim, como reforço, vale relembrar:

Sendo “**a**” um número real qualquer e “**n**” um número inteiro, temos:

Para **n > 1**	$a^n = a. a. a...a$ (“n” fatores)
Para **n = 1**	$a^1 = a$
Para **n = 0**	$a^0 = 1$
Para **n < 0**	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
Onde “**a^n**” é uma potência de base “**a**” e expoente inteiro “**n**”.	

6.1 PROPRIEDADES DA POTÊNCIA

As potências com expoente inteiro gozam das seguintes propriedades operatórias:

$a^m . a^n$ =	a^{m+n}	
$a^m \div a^n$ =	a^{m-n}	Sendo **a ≠ 0**
$(a . b)^n$ =	$a^n . b^n$	
$(a \div b)^n$ =	$a^n \div b^n$	Para **b ≠ 0**
$(a^m)^n$ =	$a^{m.n}$	

Para efetuarmos cálculos de potências, com o uso da **HP 12C**, utilizamos a tecla $\boxed{Y^x}$ que nos fornecerá a resposta de forma imediata. Vejamos alguns modelos:

Item	Situação	Representação
a	5 elevado a 4.	5^4
b	10 elevado a 2	10^2
c	2 elevado a 10	2^{10}
d	1 elevado a 15	1^{15}

RESOLUÇÃO

Item	Resolução				Resposta
a	5	ENTER	4	Y^x	625
b	10	ENTER	2	Y^x	100
c	2	ENTER	10	Y^x	1024
d	1	ENTER	15	Y^x	1

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Item	Situação	Representação	Resposta
a	$(5^{-6} . 5^{6})$	$5^{-6+6} = 5^0$	1
b	$(7^3 : 7^5)$	$7^{3-5} = 7^{-2} = 1/7^2$	1/49
c	$(6^{-2} . 6^{-5})$	$6^{-2-5} = 6^{-7} = 1/6^7$	1/279936
d	$(2^5 \div 2^{3)}$	$2^{5-3} = 2^2$	4
e	$(3^5)^2$	$3^{5.2} = 3^{10}$	59049
f	$(1 \div 2)^2$	$1^2 \div 2^2 = 1 \div 4$	0,25

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Item	Situação	Resposta
a	$(6^{-5} . 6^5) = 6^0$	1
b	$(5^3 \div 5^2) = 5^1$	5
c	$(3^{-2} . 3^{-3}) = 3^{-5} = 1/3^5$	1/243
d	$(5^5 \div 5^2) = 5^3$	125
e	$(5^2)^3 = 5^6$	15625
f	$(3 . 4)^5 = 3^5 . 4^5 = 12^5$	248832
g	$(2 \div 3)^2 = 2^2 \div 3^2$	4/9
h	$(1 \div 4)^{-1}$	$1/(1/4)^1$
i	$2^{-2} = 1/2^2$	1/4

7.0 MÉDIAS

O assunto em referência, de grande aplicabilidade no dia-a-dia, está presente em nosso cotidiano, sem que muitas vezes sequer o percebamos. Todos os levantamentos que indicam a variação de preços, por exemplo, através de um tratamento mais elaborado, com recursos da estatística, se baseiam na coleta de dados e são avaliados com o uso de médias.

7.1 MÉDIA ARITMÉTICA

Utilizada para dar-nos uma prévia geral do cenário. Tem limitações para análise mais aprofundada, visto que é um método utilizado para situações especificas.

Exemplos:

a) Três amigos, por ocasião de uma data festiva, resolvem fazer um evento social, em um clube da cidade. Cada qual investiu: “a”, $ 76,45; “b”, $ 81,47; “c”, $ 73,52. Quer se saber qual a média aritmética de gastos dos três amigos.

f **CLEAR** **REG**

76,45 ∑+

81,47 ∑+

73,52 ∑+

g $\bar{x}$ ► $ 77,15 (a média aritmética de gastos dos três amigos)

b) Pesquisa amostral realizada em encarte imobiliário apontou que o valor de oferta de venda para quitinetes com 45 m^2 foi de: $ 75.000; $ 78.000; $ 80.000, e $ 85.000. Qual o preço médio de venda das quitinetes?

f **CLEAR** **REG**

75.000, ∑+

78.000, ∑+

80.000, ∑+

85.000, ∑+

g $\overline{x}$ ► $ 79.500, (valor médio de oferta de venda das quitinetes)

c) A compra de determinado mantimento realizado por cinco instituições filantrópicas, para um mês, apontou os seguintes valores:

Instituição	Quantidade – kg	Valor ($)
A	200	1.234,56
B	210	987,65
C	190	1.345,67
D	220	876,54
E	180	1.456,78

Pede-se calcular a média aritmética dos gastos em $ e a média das quantidades adquiridas em quilogramas (kg), pelas Instituições.

f **CLEAR** **REG**

200 **ENTER** 1234,56 **∑+**

210 **ENTER** 987,65 **∑+**

190 **ENTER** 1345,67 **∑+**

220 **ENTER** 876,54 **∑+**

180 **ENTER** 1456,78 **∑+**

g $\overline{x}$ ► $ 1.180,24 (média dos gastos em $)

x <> y ► 200,00 kg (média das quantidades em quilogramas)

7.2 MÉDIA PONDERADA

Muito utilizado em provas escolares, vestibulares, concursos e no mercado financeiro em que se atribui pesos para determinados itens, de forma a maximizar ou minimizar o impacto dos mesmos no resultado da avaliação final.

Exemplos:

a) Num concurso, observou-se o desempenho de um candidato, em cinco áreas / disciplinas. Pondere as notas.

Disciplina	Nota	Peso
A	9,25	3,75
B	9,39	3,45
C	9,84	3,56
D	9,52	3,61
E	9,47	3,50

[f] [CLEAR] [REG]

9,25 [ENTER] 3,75 [∑+]
9,39 [ENTER] 3,45 [∑+]
9,84 [ENTER] 3,56 [∑+]
9,52 [ENTER] 3,61 [∑+]
9,47 [ENTER] 3,50 [∑+]
[g] [$\bar{x}w$] ► 9,49 (notas médias ponderadas)

b) Certo investidor, durante o mês, efetuou quatro operações em um fundo de investimento, adquirindo cotas conforme abaixo. Calcule o custo médio ponderado destas cotas adquiridas.

Operação	Quantidade de cotas	Valor da cota $
A	16.545,876	4,8795
B	9.472,421	4,3842
C	34.952,753	4,2497
D	39.028,950	4,6816

Atentar que o peso é representado pela quantidade de cotas

[f] [CLEAR] [REG]

4,8795 [ENTER] 16545,876 [∑+]
4,3842 [ENTER] 9472,421 [∑+]
4,2497 [ENTER] 34952,753 [∑+]
4,6816 [ENTER] 39028,950 [∑+]
[g] [$\bar{x}w$] [f] 4 ► 4,5352 (custo médio das cotas adquiridas do fundo)

c) Um aplicador efetua a compra de três certificados de depósito bancário (CDB), com renda prefixada, com a mesma rentabilidade, porém com prazos de resgate diferenciados. Os dados dos três títulos estão abaixo. Calcule o prazo médio desses títulos.

Título	Prazo (dias)	Valor $
A	99	55.000,00
B	179	82.500,00
C	359	150.000,00

f **CLEAR** **REG**

99 **ENTER** 55000, **∑+**

179 **ENTER** 82500, **∑+**

359 **ENTER** 150000, **∑+**

g **$\bar{x}$w** **f** 2 ► 257,61 (dias de prazo médio)

8.0 TAXAS DE JUROS

Neste tópico, serão abordadas as taxas de juros nominal, efetiva e equivalente. O assunto é de fácil compreensão, exigindo apenas uma leitura atenta e a realização dos exercícios de fixação.

Antes, porém, conceituemos **TAXA DE JUROS** como sendo a inter-relação entre o saldo devedor e os juros, considerando a periodicidade com que são mensurados.

8.1 TAXA NOMINAL

Refere-se à taxa de juros anunciada ou contratada que produz, no período de tempo a que se refere a sua unidade, juros diferentes do que se pactuou.

Exemplo:

O rendimento anunciado para a remuneração das cadernetas de poupança é de 6,00% a.a. (taxa nominal). No entanto, o período de remuneração é mensal. Dividindo-se a taxa nominal, 6,00% a.a. pelo número de meses do ano, 12, resulta em 0,50% a.m.

Como o juro do período é incorporado no saldo para o mês subseqüente, incorrendo em nova remuneração, a taxa de juros não é mais a contratada, qual seja, 6,00% a.a. e, sim, de 6,1678% a.a. que é a taxa efetiva de remuneração da caderneta de poupança.

8.2 TAXA EFETIVA

É a taxa de juros que efetivamente ocorre na operação. Ou seja, é a taxa que remunera (ótica do investidor) o capital no período anunciado com os efetivamente incorridos.

Observe o modelo a seguir:

Uma avó, querendo presentear sua neta, resolve depositar mensalmente em uma caderneta de poupança, a importância de $ 50,00 durante doze meses seguidos. A remuneração oferecida é de 6,00% a.a. com os rendimentos sendo auferidos mensalmente. Pede-se:

1) Qual é a taxa nominal de juros ao ano?

2) Qual é a taxa efetiva anual de juros que perceberá essa poupança?

3) Quanto terá de saldo ao final do 12º mês?

RESOLUÇÃO:

Para o quesito 1, é a taxa anunciada, qual seja, 6,00% a a.

Para o quesito 2, temos:

[f] [CLEAR] [REG] [f] 2

6 [ENTER] 12 [÷] ► 0,50 (taxa de juro mensal da caderneta de poupança)

0,50 [ENTER] 100 [÷] 1 [+]

12 [y^x] 1 [-] 100 [X] [f] 4 ► 6,1678% a.a. (taxa efetiva de juros, ao ano)

Para o quesito 3, temos:

[f] [CLEAR] [REG] [f] 2

12 [n] 0,50 [i] 0,00 [PV] 50,00 [CHS] [PMT] [FV]

► $ 616,78 (saldo no final de 12 meses)

Para anualizar uma taxa de juros, devemos utilizar o conceito de potência, abordado no item 6.0. Para tanto, o cálculo consiste em:

a) Transformá-la de percentual (%) em unitária, procedendo à divisão por 100; ⇨ *(i% ÷ 100)*

b) Acrescer em uma unidade; ⇨ *(1 + i')*

c) Elevar a unidade de tempo pretendida; ⇨ *(1 + i')^n*

d) Subtrair em uma unidade; ⇨ *[(1 + i')^n -1]*

e) Multiplicar por 100. ⇨ *[(1 + i')^n -1] 100*

A fórmula para o cálculo é dada por **i= [(1+(i ÷ 100))^n -1]100**

Na **HP 12C**, informamos os dados da fórmula e obtemos a resposta. Acompanhe:

f **CLEAR** **REG** **f** 4

0,50 **CLEAR**

100 **÷**

1 **+**

12 **y^x**

1 **-**

100 **X** → 6,1678% a.a. (taxa de juros efetiva %, ao ano)

EXEMPLO:

a) Determinada instituição financeira publica anúncio ofertando a investidores uma aplicação para noventa dias, com juros de 1,00% ao mês.

Certo investidor, lendo o anúncio, resolve fazer a aplicação e, para tanto, aplica a importância de $ 100.000. Determine:

1) O montante a ser resgatado ao término do prazo?

2) A taxa de juros efetiva da operação no período?

RESOLUÇÃO:

1) O montante é dado pela fórmula **M=PV(1+i)^n**

Na **HP 12C,** pelas seguintes teclas:

3 **n** 1,00 **i** 100000, **CHS** **PV** 0,00 **PMT** **FV**

► $ 103.030,10

2) O cálculo da taxa efetiva é dado por **i=[($\sqrt[n]{M/P}$) -1]100**

Na **HP 12C** pelas seguintes teclas:

1 **n** 100000, **CHS** **PV** 103.030,10 **FV** **i**

► 3,030100 % no período. ⇨ *[(103.030,10 ÷ 100.000)-1]100*

8.3 TAXA EQUIVALENTE

Refere-se à taxa de juro que, embora expressas em números e em unidades de tempo diferentes, produzem o mesmo resultado, no mesmo prazo. Ou, duas taxas são equivalentes quando transformam um mesmo capital **P** aplicado pelo mesmo prazo **N** em montantes de resgate **M** também iguais.

Exemplo:

Se aplicarmos por 30 dias $ 1.000,00 a 0,3182% ao dia, obteremos o mesmo valor de resgate que uma outra aplicação de $ 1.000,00 a 10% a.m. pelo mesmo prazo.

Observe a demonstração a seguir, com a utilização da **HP 12C**.

n	i	CHS PV	FV	Resultado
30	0,3182	1000	►	$ 1.100,00
1	10,00	1000	►	$ 1.100,00

Assim, podemos afirmar que ambas as taxas de juros são equivalentes, pois, embora expressas em números % e prazos diferentes, produzem o mesmo resultado no período comum.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Item	Situação	Resposta
a	Qual a taxa diária equivalente a 8,00% a.m.?	i_d = 0,2569%
b	Qual a taxa mensal equivalente a 0,03% a.d.?	i_{am} = 0,9039%
c	Qual a taxa em 105 dias equivalente a taxa de 400% a.a.	i_{105} = 59,91%
d	Qual a taxa em 21 dias equivalente a taxa 100% a.s.?	i_{21} = 8,42 %
e	A taxa 0,43% a.d. é equivalente a quanto ao mês, trimestre, semestre e anual?	i_{30} = 13,74%; i_{90} = 47,13%; i_{180} = 116,48% i_{360} = 368,65%

9.0 REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES OU LINEAR (JUROS SIMPLES)

Quando cedemos um bem para uma terceira pessoa se utilizar, designamos por aluguel a remuneração obtida, enquanto que, por juros, designamos a remuneração pelo capital.

Juro, portanto, é o rendimento proporcionado pela cessão de uma unidade de capital, durante determinado tempo. A preservação do valor do capital em face da sua deterioração em conseqüência do processo inflacionário chama-se Correção Monetária. Seu estudo não faz parte deste material.

O modelo que ora iremos apresentar, **regime de capitalização simples**, é o regime de remuneração de capital, onde, para fins de cálculo de juros, o capital aplicado permanece com o mesmo valor (constante), desde o início até o final da operação financeira e, os juros, são exigidos somente ao final da operação.

Importante observar que nesse regime, não ocorre à remuneração do juro do período anterior. O juro incide tão somente sobre o capital inicial (**Co, PV**).

Iremos, neste módulo, abordar juros, montante, valor atual, desconto e equivalência de capitais.

9.1 JUROS SIMPLES

A remuneração do capital aplicado é diretamente proporcional ao seu valor e ao tempo de aplicação. O fator de proporcionalidade é a taxa de juros.

A fórmula aritmética é dada por:

$$\boxed{J = Cin}$$

Onde:

J	C	i	n
Juros	Capital ou Principal	Taxa de juros	Período

Na **HP 12C**, precisamos atentar para um artifício, sem o qual o cálculo apresentará distorções.

Sempre, para o prazo, [n] deveremos informar em dias e, para a taxa [i] ao ano. E, ao solicitar o valor do juro, devemos utilizar a tecla auxiliar [f] seguida da tecla [INT]

Acompanhe alguns modelos:

Calcular o juro, em regime simples, referente a um capital de $ 1.000,00 aplicado conforme as situações abaixo:

Item	Situação
a	15% a.a., por um ano e dois meses;
b	18% a.a., por quatro anos;
c	20% a.a., por cinco meses;
d	35% a.a., quatro anos e oito meses;
e	40% a.a., por três anos e quatro meses.

RESOLUÇÃO:

a) J = Cin J= 1000[(0,15 ÷ 12) 14] J= 1000(0,1750) **J= ► $ 175,00**

f **CLEAR** **REG**

n	**i**	**CHS** **PV**	**f** **INT**
420	15	1000	**175,00**

b) J = Cin J= 1000(0,18 . 4) J= 1000(0,72) **J= ► $ 720,00**

n	**i**	**CHS** **PV**	**f** **INT**
1440	18	1000	**720,00**

c) J = Cin J= 1000[(0,20 ÷ 12) 5] J= 1000(0,0833) **J= ► $ 83,33**

n	**i**	**CHS** **PV**	**f** **INT**
150	20	1000	**83,33**

d) J = Cin J= 1000[(0,35 ÷ 12) 56] J= 1000(1,6333) **J = ► $ 1.633,33**

n	**i**	**CHS** **PV**	**f** **INT**
1680	35	1000	**1.633,33**

e) J = Cin J= 1000[(0,40 ÷ 12) 40] J= 1000(1,3333) **J = ► $ 1.333,33**

n	**i**	**CHS** **PV**	**f** **INT**
1200	40	1000	**1.333,33**

9.2 MONTANTE

Montante é o resultado da soma dos juros produzidos por um capital e este mesmo capital, ao final do período de remuneração.

Montante = Capital + Juros

A fórmula básica é dada por:

$$M = P(1+in)$$

Onde:

M	P	i	n
Montante	Principal – Capital	Taxa de juro	Prazo – período

Na **HP 12C**, precisamos atentar para um artifício, sem o qual o cálculo apresentado terá distorções.

Para o prazo **n** devemos informar em dias e, para a taxa de juros **i**, ao ano.

E, ao solicitar o valor do juro, devemos utilizar da tecla auxiliar **f** seguida da tecla **INT**

Após os passos acima, quando teremos o valor dos juros, deveremos pressionar a tecla **+** e será exibido o montante.

Calcular o montante, em regime simples, referente a um capital de $ 1.000,00 aplicado conforme as situações abaixo:

Item	Situação
a	15% a.a., por um ano e dois meses;
b	18% a.a., por quatro anos;
c	20% a.a., por cinco meses;
d	35% a.a., quatro anos e oito meses;
e	40% a.a., por três anos e quatro meses.

RESOLUÇÃO:

a) M = P(1+in) M= 1000[1+((0,15 ÷ 12) 14)] M= 1000(1,1750) **M = ► $ 1.175,00**

f **CLEAR** **REG** **f** 2

n	i	CHS PV	f INT +
420	15	1000	**1.175,00**

b) M = P(1+in) M= 1000[1+(0,18 . 4)] M= 1000(1,72) **M = ► $ 1.720,00**

n	i	CHS PV	f INT +
1440	18	1000	**1.720,00**

c) M = P(1+in) M= 1000[1+((0,20 ÷ 12) 5)] M= 1000(1,0833) **M = ► $ 1.083,33**

n	i	CHS PV	f INT +
150	20	1000	**1.083,33**

d) M = P(1+in) M= 1000[1+(0,35 ÷ 12) 56] M= 1000(2,6333) **M = ► $ 2.633,33**

n	i	CHS PV	f INT +
1680	35	1000	**2.633,33**

e) M = P(1+in) M= 1000[1+(0,40 ÷ 12) 40] M= 1000(2,3333) **J = ► $ 2.333,33**

n	i	CHS PV	f INT +
1200	40	1000	**2.333,33**

9.3 VALOR ATUAL

Valor atual é o valor que equivale a um capital futuro numa data anterior ao seu vencimento, de acordo com uma taxa de juros ou uma taxa de desconto.

Vale dizer, que o valor atual resulta da exclusão de juros embutidos no valor futuro, considerando o tempo entre as duas datas e a taxa de juros ou de desconto utilizada**.** *Aqui, estamos utilizando o método de desconto racional. (A calculadora não tem algoritmo para efetuar o cálculo de desconto comercial/bancário).*

A fórmula básica é dada por **:**

$$\boxed{VA = \frac{VN}{(1+in)}}$$

Onde:

VA	VN	i	n
Valor nominal - juros	Capital + Juros	Taxa de desconto	Período - prazo

Na **HP 12C**, precisamos atentar para um artifício, sem o qual o cálculo apresentado terá distorções.

Para o cálculo de valor atual, devemos, sempre, para o prazo **n** e também para a taxa **i** informar os dados ao ano, diferentemente do que fazíamos quando do cálculo dos juros e do montante.

Se o prazo dado não estiver em anos, transforma-se o mesmo em dias e, em seguida, divide-se o por 360 e insere-se em **n**.

Acompanhe os modelos, a seguir:

a) Um título com vencimento para 3 meses, cuja taxa de desconto é de 3% a.m. com valor nominal de $ 2.500,00 terá que valor presente?

VA = VN ÷ (1+in) VA= 2500 ÷ (1+0,03x3) VA= 2500 ÷ (1,09) **VA = $ 2.293,58**

f **CLEAR** **REG** **f** 2

n	**i**	**CHS** **FV**	**PV**	**Resultado**
((3x30) ÷ 360) ⇨ **0,25**	(3x12) ⇨ **36**	**2500**,	►	**2.293,58**

b) Uma nota promissória com vencimento para 30 dias, com valor nominal de $ 1.100,00 foi apresentada para desconto e o banco utilizou a taxa de juros de 1,00% a.m. Qual será o valor líquido que o portador receberá?

VA = VN ÷ (1+in) VA= 1100 ÷ (1+0,01x1) VA= 1100 ÷ (1,01) **VA = $ 1.089,11**

n	**i**	**CHS** **FV**	**PV**	**Resultado**
((1x30) ÷ 360) ⇨ **0,08**	(1x12) ⇨ **12**	**1100**,	►	**1.089,11**

c) Qual será o valor atual de uma dívida com vencimento de um ano, taxa de desconto de 20% a.a. e valor no vencimento de $ 1.200,00?

VA = VN ÷ (1+in) VA= 1200 ÷ (1+0,20x1) VA= 1200 ÷ (1,20) **VA = $ 1.000,00**

n	**i**	**CHS** **FV**	**PV**	**Resultado**
1	**20**	**1200**,	►	**1.000,00**

9.4 DESCONTO

Temos duas formas de cálculo para desconto. **A primeira**, denominada de **Desconto Racional ou por dentro** e **a segunda** denominada de **desconto comercial ou bancário ou por fora**.

9.4.1. DESCONTO RACIONAL OU "POR DENTRO"

Esta modalidade de cálculo não é utilizada no dia-a-dia, mas como um método para determinar o "preço" de ativos financeiros, de recompra de títulos de crédito ou, ainda, de cálculos de deságio.

Uma de suas características é a de que a taxa utilizada é uma taxa de juros.

O método deve ser entendido como o de calcular o "preço" a ser pago por um ativo financeiro (com vencimento futuro), de modo que, a diferença entre o valor pago e o valor de compra, represente, em termos de taxa de juros, a remuneração pretendida na transação.

Como sua utilização no dia-a-dia é extremamente restrita, nos limitaremos a um exemplo, apenas como referencia e entendimento.

EXEMPLO:

Um título do tesouro nacional de $ 5.500,00 está sendo negociado três meses antes do vencimento. Sabendo-se que a taxa de juros praticada no mercado, no momento, é de 7,25% a.a. qual o desconto que deverá ser obtido para adquiri-lo?

$$\mathbf{DR = \frac{VN\ i}{(1+in)}}$$

DR = 5500[(0,0725 ÷12) 3] ÷ [1+(0,0725 ÷ 12) 3]
DR = 5500 (0,018125) ÷ (1,018125)
DR = ► $ 97,91

n	i	CHS FV	PV RCL FV +	Resultado
(3x30) ÷ 360 ⇨ **0,25**	**7,25**	**5500**,	►	**97,91**

DR	VN	VA	Resultado
VN – VA	5.500,00	5.402,09	**97,91**

9.4.2 DESCONTO COMERCIAL - BANCÁRIO OU "POR FORA"

A modalidade de operação acima é uma operação financeira, das mais usuais, onde a quantia a ser emprestada, é **calculada com base no valor nominal** de um título de crédito.

É com base nesse valor nominal que se calcula o desconto. Valor este (desconto) que é deduzido daquele (valor nominal) e entregue ao portador do título a diferença apurada. (Valor do título menos o valor do desconto)

Desconto comercial = Valor nominal – valor atual

A representação da fórmula que nos fornece o valor do desconto comercial ou bancário dá-se através da seguinte expressão:

DC = VN i n

Para o valor atual, o valor líquido a ser entregue ao portador do título, temos:

VA = VN (1 – in)

*Lembrando que a calculadora **HP 12C** não tem um algoritmo de cálculo para essa modalidade de desconto. Apenas utilizamos os recursos que oferece para o cálculo algébrico.*

Vejamos um modelo, conforme abaixo:

Um título de $ 15.500,00 poderá ser saldado noventa dias antes do vencimento. Sabendo-se que a taxa de juros (de desconto) é de 8,50% a.a. qual o valor do desconto?

RESOLUÇÃO:

DC = VN i n DC = 15500 [(0,085 ÷ 360) 90] **DC = ►$ 329,38**

VA =VN (1-in) VA = 15500 [1-((0,085 ÷ 360) 90))] **VA = ►$ 15.170,63**

Comparando os dois métodos de cálculo, podemos explicar e entender o que sucede quanto ao desconto racional ou por dentro, conforme segue:

No desconto racional ou por dentro, o valor do desconto é trazido a valor presente na mesma taxa de desconto. Ou seja, o desconto (que é calculado sobre o valor nominal), que está representado em termos monetários no final ou no vencimento do título (valor do futuro), também é trazido a valor presente (valor atual), visto que será pago no ato. Portanto, haverá uma redução, em termos monetários, do seu valor, liberando uma fatia maior para o portador do título.

Reforçando apenas que essa modalidade de desconto (racional ou por dentro) não é utilizada pelo sistema financeiro para operações de desconto de títulos ou haveres financeiros.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

a) Uma nota promissória, no valor de $ 10.000,00 no seu vencimento, foi descontada dois meses antes do prazo. Sabendo-se que a taxa para desconto comercial era de 28% a.a. qual foi o desconto e qual o valor atual comercial?

Resposta: DC $ 466,66; VA $ 9.533,34

b) Certo título, cujo vencimento ocorrerá dentro de 90 dias, tem valor de face de $ 80.000,00. A taxa de desconto praticada no momento é de 6,50% a.m. Calcular o valor do desconto comercial e o valor líquido creditado.

Resposta: DC $ 15.600,00; VA $ 64.400,00

c) De quanto deverá ser o valor nominal de uma nota promissória, para que, através de uma operação de desconto bancário de 60 dias, com a taxa de desconto de 7,80% a.m. resulte a quantia de $ 180.000,00 a ser emprestada?

Resposta: VN $ 213.270,14

d) Qual foi o valor da duplicata, que descontada pela taxa de desconto de 8,30% a.m. 57 dias antes do seu vencimento, proporcionou o valor creditado de $ 200.046,25?

Resposta: $ 237.500,00

e) Calcular o valor nominal de uma duplicata, se ao descontá-la, pela taxa de desconto de 6,25% a.m. pelo prazo de 120 dias, resultou o mesmo valor creditado, que o de um papagaio (nota promissória), por 90 dias pela taxa de 8,00% a.m, cuja NP foi de $ 300.000,00?

Resposta: $ 304.000,00

f) Qual será o valor creditado, ao se descontar uma duplicata de $ 630.000,00, com vencimento em 45 dias, pela taxa de desconto de 6,80% a.m.?

Resposta: $ 565.740,00

g) Qual o valor nominal de uma nota promissória, se a quantia a ser creditada deverá ser de $ 260.000,00, prazo do “papagaio” de 90 dias e a taxa de desconto de 5,50% a.m.?

Resposta: $ 311.377,25

9.5 EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS

No dia-a-dia dos negócios, ocorrem situações em que não se consegue cumprir determinados compromissos financeiros. E, isto, por inúmeras razões que vão desde inadimplência de créditos a receber, passando por descasamento entre fluxos financeiros e operacionais e por muitos outros.

Para essas e outras situações, o tópico que iremos abordar se encaixa e procura adequar os valores envolvidos. Para ilustrar o assunto, vamos avaliar as seguintes situações:

1) Uma pessoa tem uma nota promissória no valor nominal de $ 1.500,00 que vencerá em dois anos, cuja taxa de remuneração é de 25,00% a.a. Além desta, possui $ 2.000,00 que irá aplicar a 30,00% a.a. durante dois anos. Pede-se:

a) Quanto entre títulos e disponível, essa pessoa possui hoje?

b) Quanto possuirá daqui a um ano?

c) Quanto possuirá daqui a dois anos?

RESOLUÇÃO:

a) x = 2000 + [(1500) ÷ (1+(0,25 . 2))] **= $ 3.000,**

b) y = 2000 x (1+0,30) + [(1500) ÷ (1+0,25)] **= $ 3.800,**

c) z = 2000 x [1+(0,30x2)] + 1500 **= $ 4.700,**

2) Um investidor possui três títulos aplicados no mercado financeiro, sendo seus valores nominais $ 10.000,00; $ 15.000,00 e $ 20.000,00. As épocas de resgate são respectivamente de 2 meses, 8 meses e dois anos. Qual é o valor desses títulos na data zero, considerando-se a taxa de juros de 27% a.a.?

Resposta: a) $ 9.569,38 b) $ 12.711,87 c) $ 12.987,01 $\sum_{123}$ $ 35.268,26

10.0 REGIME DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA OU EXPONENCIAL

O regime de capitalização composta caracteriza-se pela incorporação do juro gerado no período inicial ou anterior na formação dos juros do período seguinte.

Temos:

P	i	N	M
Capital inicial, Principal	Taxa de juros	Prazo, período	Montante, valor futuro

10.1 MONTANTE

O montante refere-se ao total acumulado (capital mais juros) ao final de certo período de tempo a uma determinada taxa de juros.

Montante = Capital inicial + Juros

O montante pode ser determinado com a utilização da fórmula:

$$M = P(1 + i)^{n}$$

Para ilustrar, vamos examinar um exemplo de um capital de $ 1.000,00 aplicados por cinco anos com juros de 10% a.a. nos dois regimes de capitalização, simples e composta.

	Juros simples				**Juros compostos**		
N	**Cálculo**	**Juros**	**Montante**		**Cálculo**	**Juros**	**Montante**
0		-	1.000,00			-	1.000,00
1	1.000,00(0,10)	100,00	1.100,00		1.000,00(0,10)	100,00	1.100,00
2	1.000,00(0,10)	100,00	1.200,00		1.100,00(0,10)	110,00	1.210,00
3	1.000,00(0,10)	100,00	1.300,00		1.210,00(0,10)	121,00	1.331,00
4	1.000,00(0,10)	100,00	1.400,00		1.331,00(0,10)	133,10	1.464,10
5	1.000,00(0,10)	100,00	1.500,00		1.464,10(0,10)	146,41	1.610,51

Pelo exemplo acima, fica evidenciada a diferença entre os dois regimes de capitalização e, quanto maior for o período, maior será a diferença entre os dois regimes de capitalização.

Para demonstrar, vejamos mais alguns modelos. Agora, com a utilização da **HP 12C**.

Calcule o montante referente a um capital de $ 1.000,00 aplicado conforme as situações abaixo:

a) 15% a.a., por um ano e dois meses;

b) 18% a.a., por quatro anos;

c) 20% a.a., por cinco meses;

d) 35% a.a., quatro anos e oito meses;

e) 40% a.a., por três anos e quatro meses.

RESOLUÇÃO:

a) **M =P(1+i)^{n}** M=1000{[(1,15)$^{1/12}$]^{14}} **M = ► $ 1.177,10**

f **CLEAR** **REG** **f** 2

n	i	CHS PV	PMT	FV	Resposta
14	1,171492	1000	0,00	►	**1.177,10**

b) **M =P(1+i)^{n}** M=1000{[(1,18)^{4}] } **M = ► $ 1.938,78**

n	i	CHS PV	PMT	FV	Resposta
4	18	1000	0,00	►	**1.938,78**

c) **M =P(1+i)^{n}** M=1000{[(1,20)$^{1/12}$]^{5}} **M = ► $ 1.078,93**

n	i	CHS PV	PMT	FV	Resposta
5	1,530947	1000	0,00	►	**1.078,93**

d) **M =P(1+i)^{n}** M=1000{[(1,35)$^{1/12}$]^{56}} **M = ► $ 4.057,18**

n	i	CHS PV	PMT	FV	Resposta
56	2,532406	1000	0,00	►	**4.057,18**

e) **M =P(1+i)^{n}** M=1000{[(1,40)$^{1/12}$]^{40}} **M = ► $ 3.069,68**

n	i	CHS PV	PMT	FV	Resposta
40	2,843616	1000	0,00	►	**3.069,68**

10.2 JUROS COMPOSTO

Refere-se ao rendimento proporcionado por certo capital, aplicado a determinada taxa de juros e por certo período de tempo.

O seu cálculo é algébrico, visto tratar-se da diferença entre o montante e o capital inicial.

Juro = Montante - Capital

Para a determinação dos juros, a fórmula algébrica é dada por:

$$J = P[(1+i)^n - 1]$$

Utilizando os exemplos acima, do cálculo de montante, calcule os valores dos juros.

RESOLUÇÃO

a) **$J = P[(1+i)^n - 1]$** $J= 1000[(1+0,01171492)^{14} - 1]$ **$J = 177,10$**

f **REG** **CLEAR** **f** 2

n	i	CHS PV	PMT	FV RCL PV +	Resposta
14	1,171492	1000	0,00	►	**177,10**

b) **$J = P[(1+i)^n - 1]$** $J= 1000[(1+0,18)^{4} - 1]$ **$J = 938,78$**

n	i	CHS PV	PMT	FV RCL PV +	Resposta
4	18	1000	0,00	►	**938,78**

c) **$J = P[(1+i)^n - 1]$** $J= 1000[(1+0,01530947)^{5} - 1]$ **$J = 78,93$**

n	i	CHS PV	PMT	FV RCL PV +	Resposta
5	1,530947	1000	0,00	►	**78,93**

d) **$J = P[(1+i)^n - 1]$** $J= 1000[(1+0,02532406)^{56} - 1]$ **$J = 3.057,18$**

n	i	CHS PV	PMT	FV RCL PV +	Resposta
56	2,532406	1000	0,00	►	**3.057,18**

e) **$J = P[(1+i)^n - 1]$** $J= 1000[(1+0,02843616)^{40} - 1]$ **$J = 2.069,68$**

n	i	CHS PV	PMT	FV RCL PV +	Resposta
40	2,843616	1000	0,00	►	**2.069,68**

Considerando a importância do assunto, vamos apresentar mais alguns modelos com as resoluções.

a) Calcule o montante, considerando:

Valor da aplicação	Taxa % de juros	Período
$ 10.000,00	20,00% a.a.	5 anos
$ 10.000,00	15,00% a.a.	3 anos e meio
$ 10.000,00	2,50% a.m.	1 ano

RESOLUÇÃO:

$\mathbf{M = P(1+i)^n}$	$M=10.000\{[(1,20)^5]\}$	**M = ► $ 24.883,20**
$\mathbf{M = P(1+i)^n}$	$M=10.000\{[(1,15)^{1/12}]^{42}\}$	**M = ► $ 16.309,57**
$\mathbf{M = P(1+i)^n}$	$M=10.000\{[(1,025)^{12}]\}$	**M = ► $ 13.448,89**

f **CLEAR** **REG** **f** 2

n	**i**	**CHS** **PV**	**PMT**	**FV**	**Resposta**
5	20	10000	0,00	►	**24.883,20**
42	1,171492	10000	0,00	►	**16.309,57**
12	2,50	10000	0,00	►	**13.448,89**

b) No exercício “a” acima, qual é o juro em cada hipótese?

J = M - P

$\mathbf{J = P[(1+i)^n - 1]}$

J= 24.883,20-10.000,00	**►J = $ 14.883,20**
$J= 10.000,00[(1,20)^5 -1]$	**► J= $ 14.883,20**
J= 16.309,57 – 10.000,00	**► J = $ 6.309,57**
$J= 10.000,00[(1,011715)^{42} -1]$	**► J= $ 6.309,57**
J= 13.448,89 – 10.000,00	**► J = $ 3.448,89**
$J= 10.000,00[(1,025)^{12} -1]$	**► J = $ 3.448,89**

f **CLEAR** **REG** **f** 2

n	**i**	**CHS** **PV**	**PMT**	**FV** **RCL** **PV** **+**	**Resposta**
5	20	10000	0,00	►	**14.883,20**
42	1,171492	10000	0,00	►	**6.309,57**
12	2,50	10000	0,00	►	**3.448,89**

c) Se um casal quiser adquirir um imóvel daqui a dois anos, por $ 500.000,00 qual deverá ser o valor que deverão aplicar hoje, considerando os três patamares de taxas de juros atuais para diferentes tipos de investimentos em análise?

a) 20,00% a.a.   b) 15,00% a.a.   c) 2,50% a.m.

RESOLUÇÃO:

$M = P(1 + i)^n$ ► **$P = M \div (1+i)^n$**

P = 500.000, ÷ $(1{,}20)^2$ ► **$ 347.222,22**

P = 500.000, ÷ $(1{,}15)^2$ ► **$ 378.071,83**

P = 500.000, ÷ $(1{,}025)^{24}$ ► **$ 276.437,68**

f **CLEAR** **REG** **f** 2

n	i	CHS FV	PMT	PV	Resposta
2	20	500.000,	0,00	►	**347.222,22**
2	15	500.000,	0,00	►	**378.071,83**
24	2,50	500.000,	0,00	►	**276.437,68**

c) Qual a taxa mensal de juros recebida por um investidor que aplicou $ 10.000,00 e obteve os montantes a seguir.

Capital	Montante	Período
10.000,00	24.883,00	5 anos
10.000,00	16.309,60	3 anos e meio
10.000,00	13.448,90	1 ano

RESOLUÇÃO:

Log (1+i) = (Log M – Log P) ÷ N

Log (1+i) = (Log 24.883, – Log 10.000,) ÷ 5 ► **i = 20,00% a.a.**

Log (1+i) = (Log 16.309,60 – Log 10.000,) ÷ 42 ► **i = 1,171497% a.m.**

Log (1+i) = (Log 13.448,90 – Log 10.000,) ÷ 12 ► **i = 2,50% a.m.**

f **CLEAR** **REG** **f** 2

n	CHS PV	PMT	FV	i	Resposta
5	10000,	0,00	24883,	►	**20,00**

42	10000,	0,00	16309,60	►	**1,171497**
12	10000,	0,00	13448,90	►	**2,50**

e) Um imóvel é vendido por $ 220.000,00. Caso o comprador opte por pagar em uma única parcela após certo prazo, o valor a pagar referente a juros será de $ 61.618,59. Sabendo-se que a taxa de juros é de 2,50% a.m. qual é o prazo para pagamento?

RESOLUÇÃO:

N = (Log M – Log P) ÷ Log (1+i)

N= (log 281618,59 – log 220000) ÷ Log(1,025) **N = ► 10 meses**.

f **CLEAR** **REG** **f** 2

i	**CHS** **PV**	**PMT**	**FV**	**n**	**Resposta**
2,50	220000,	0,00	281618,59	►	**10**

10.3 ANUIDADES

O assunto deste tópico, que trataremos a seguir, é muito importante. Sua utilização se faz no dia-a-dia, e é relativo a transações de bens e serviços, a prazo.

Abrange desde a simples compra de um objeto de uso pessoal, como roupas, passando pela aquisição de serviços como viagens, dentistas, mensalidades escolares e a compra de bens duráveis, como veículos, imóveis, etc.

As anuidades podem ser **antecipadas**, quando desembolsamos a primeira parcela no ato (entrada) ou **postecipadas**, quando efetuamos o desembolso da primeira parcela, num período seguinte.

Podem ainda ter as parcelas de **valores iguais** (séries uniformes) ou **diferenciadas** (séries não uniformes). Habitualmente, nas transações no sistema financeiro e no comércio em geral, dá-se preferência pelas parcelas iguais ou constantes (sistema de amortização price – francês).

Ainda, quanto à periodicidade, encontraremos **séries periódicas**, assim definida para aquelas prestações em que os períodos são sempre iguais (mês a mês, semestre a semestre, etc) e **não-periódicas** quando os períodos de pagamento não são iguais entre si (trimestrais com semestrais, mensais com semestrais, etc.).

Fórmulas utilizadas para os cálculos das séries de pagamentos:

POSTECIPADAS:

Montante, valor futuro	**FV = PMT [$(1+i)^n$ - 1 ÷ i]**
Capital, principal	**PV = PMT [$(1+i)^n$ - 1 ÷ $(1+i)^n$. i]**
Anuidade, prestação	**PMT = PV [$(1+i)^n$. i ÷ $(1+i)^n$ – 1]**
Prazo, período	**a) N = [(Log FV – Log PV) ÷ Log (1+i)]** **b) N = log[PMT ÷ (PMT – (PV . i))] ÷ [log (1 + i)]**

ANTECIPADAS:

Montante, valor futuro	**FV = PMT [$(1+i)^n$. (1+i) ÷ i]**
Capital, principal	**PV = PMT [(1+i) . $(1+i)^n$ - 1 ÷ $(1+i)^n$. i]**
Anuidade, prestação	**PMT = PV [i $(1+i)^n$] ÷ [(1+i) . $(1+i)^n$ – 1]**
Prazo, período	

Para fixação do assunto, o ideal é efetuarmos alguns exercícios práticos. Abaixo, encontramos alguns modelos.

a) Um televisor é vendido por $ 2.500,00 de entrada e mais três parcelas mensais de $ 1.225,48. Se a taxa de juros cobrados é de 2,50% a.m., qual é o valor a vista?

RESOLUÇÃO:

PV = PMT [(1+i) . $(1+i)^n$ - 1 ÷ $(1+i)^n$. i]

PV = 2500 + 1225,48[(1,025)$(1,025)^3$ –1 ÷ $(1,025)^3$. 0,025] **PV = ► $ 6.000,00**

f CLEAR REG f 2

n	i	PMT	FV	PV CHS	Resposta
3	2,50	1225,48	0,00	►	**3.500,00 + Entrada 2.500,00 Total: $ 6.000,00**

b) Um poupador que deposita $ 2.000,00 por mês, com rendimento mensal de 2,00% quanto possuirá daqui a dois anos?

RESOLUÇÃO:

FV = PMT [$(1+i)^n$ - 1 ÷ i]

M = 2000[$(1,02)^{24}$ - 1 ÷ 0,02] **M = ► $ 60.843,72**

n	i	PV	PMT	FV CHS	Resposta
24	2,00	0,00	2000,	►	**60.843,72**

c) Qual o valor atual (capital, principal) de uma anuidade periódica de $ 1.000,00 nas seguintes hipóteses:

Capital, principal	Taxa % de juros	Prazo, período
1.000,00	2,00% a.m.	24 meses
1.000,00	10,00% a.s.	10 semestres
1.000,00	20,00% a.a.	20 anos

RESOLUÇÃO:

PV = PMT [$(1+i)^n$ - 1 ÷ $(1+i)^n$. i]

PV = 1000[$(1,02)^{24}$ -1 ÷ $(1,02)^{24}$. 0,02] **PV = ► $ 18.913,93**

PV = 1000[$(1,10)^{10}$ -1 ÷ $(1,10)^{10}$. 0,10] **PV = ► $ 6.144,57**

PV = 1000[$(1,20)^{20}$ -1 ÷ $(1,20)^{20}$. 0,20] **PV = ► $ 4.869,58**

n	i	PMT	FV	PV CHS	Resposta
24	2,00	1000,	0,00	►	**18.913,93**
10	10	1000,	0,00	►	**6.144,57**
20	20	1000,	0,00	►	**4.869,58**

d) Uma mercadoria poderá ser adquirida em duas lojas, cujos planos de pagamento são os abaixo, sem entrada. Se o juro é de 2,50% a.m., qual a melhor opção para o comprador?

Loja	Prazo	Parcela $
A	12	1.200,00
B	24	850,00

RESOLUÇÃO:

PV = PMT [$(1+i)^n$ - 1 ÷ $(1+i)^n$. i]

$PV = 1200\ [\ (1{,}025)^{12}-1 \div\ (1{,}025)^{12}.\ 0{,}025\ ]$ **PV = ► $ 12.309,32**

$PV = 850\ [(1{,}025)^{24}\ -1 \div\ (1{,}025)^{24}.\ 0{,}025\ ]$ **PV = ►$ 15.202,24**

n	i	PMT	FV	PV CHS	Resposta
12	2,50	1200	0,00	►	**12.309,32**
24	2,50	850	0,00	►	**15.202,24**

A melhor oferta para o comprador é a da loja "A", visto ser a de menor valor presente ou atual.

e) Uma máquina cujo preço a vista é de $ 150.000,00 poderá ser adquirida financiada segundo os planos abaixo. Se a taxa de juros for de 3,00% a.m. qual a melhor opção de compra?

Plano	Entrada	Parcelas de $	Quantidade de parcelas
A	80.000,	21.600,00	4
B	50.000,	18.900,00	8

RESOLUÇÃO:

PV = PMT [(1+i)^n - 1 ÷ (1+i)^n . i]

$PV = 80000\ +[\ (21600((1{,}03)^{4}-1))\ \div\ (\ 1{,}03)^{4}\ 0{,}03\ ]$ **PV = ► $ 160.289,33**

$PV = 50000\ +[\ (18900((1{,}03)^{8}-1))\ \div\ (\ 1{,}03)^{8}\ 0{,}03\ ]$ **PV = ► $ 182.672,18**

n	i	PMT	FV	PV CHS	Resposta
4	3,00	21600	0,00	►	**80.289,33 + 80.000 entrada 160.289,33**
8	3,00	18900	0,00	►	**132.672,18 + 50.000 entrada 182.672,18**

A melhor opção para o comprador é o plano "A", visto ser o de menor valor presente ou atual.

f) O preço a vista de uma máquina é de $ 560.000,00 que poderá ser financiada em prestações iguais e mensais de $ 53.915,68. Se o juro for de 5,00% a.m. qual é o número de prestações?

RESOLUÇÃO:

N= log[PMT ÷ (PMT – (PV . i))] ÷ [log (1 + i)]

N = Log [53915,68 ÷ (53915,68 – (560000 . 0,05)] ÷ Log (1,05) **n = ► 16 meses**

i	PV CHS	PMT	FV	n	Resposta
5	560000	53915,68	0,00	►	**16**

g) Qual é o depósito mensal, durante quatro anos, que produz o montante de $ 408.868,12 se a taxa de juros é de 2,50% a.m.?

RESOLUÇÃO:

FV = PMT [(1+i)^n - 1 ÷ i]

408.868,12 = PMT [((1,025)^{48}-1) ÷ 0,025 **PMT = ► $ 4.500,00**

n	i	PV	FV	PMT CHS	Resposta
48	2,50	0,00	408.868,12	►	**4.500,00**

h) Qual o valor das prestações mensais, sabendo-se que um objeto custa à vista, $ 10.000,00 para ser pago em 15 parcelas mensais e consecutivas se a taxa de juros é de 0,79% a.m.?

RESOLUÇÃO:

PMT = PV [(1+i)^n . i ÷ (1+i)^n – 1]

PMT = 10000[(1,0079)^{15} 0,0079 ÷ (1,0079)^{15} – 1] **PMT = ► $ 709,57**

n	i	PV CHS	FV	PMT	Resposta
15	0,79	10000	0,00	►	**709,57**

i) Uma loja faz uma promoção de estoques e oferece um produto de $ 5.500,00 para pagamento em seis parcelas mensais, postecipadas, consecutivas e iguais, com juros de 0,50% a.m. Qual o valor das parcelas?

RESOLUÇÃO

PMT = PV [$(1+i)^n$. i ÷ $(1+i)^n$ – 1]

PMT = 5500 [$(1{,}005)^6$ 0,005 ÷ $(1{,}005)^6$ – 1] **PMT = ► $ 932,78**

n	i	PV CHS	FV	PMT	Resposta
6	0,50	5500	0,00	►	**932,78**

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

a) Um televisor está sendo vendido em três parcelas mensais e iguais de $ 4.000,00 Calcule o preço a vista desse aparelho se a taxa de juros é de 4,00% a.m,?
Resposta: $ 11.100,36

b) No início do mês, o Sr. Gastão decide que todo dia 30 irá depositar $ 1.000,00 em um investimento cuja rentabilidade efetiva é de 12,6813% a.a. Calcule o número de meses necessários para que essa poupança supere $ 1.000.000,00?
Resposta: 241 meses

c) O Senhor Carrão decide vender ser automóvel pelo preço de $ 86.000,00 e aceita o parcelamento em sete vezes, mensais, postecipadas e consecutivas, com juros de 5,00% a.m. Qual o valor das parcelas mensais?
Resposta: $ 14.862,50

d) Um apartamento está sendo vendido por $ 300.000,00. Se aceita o parcelamento em oito parcelas mensais, postecipadas e consecutivas, de $ 46.981,06. Qual é a taxa de juros nesse parcelamento?
Resposta: 5,30% a.m.

e) Uma loja de departamentos está ofertando um kit completo de som por $ 2.185,75 mensais, postecipadas e consecutivas, durante 10 meses. Se a taxa de juros cobrada é de 53% a.a., qual é o preço a vista desse equipamento?
Resposta: $ 18.079,97

f) Um sofá está sendo anunciado para pagamento a vista por $ 3.600,00 podendo ser financiado em 24 prestações mensais e consecutivas de $ 260,90. Calcular a taxa de juros?

Resposta: 5,00% a.m.

g) Qual o valor das parcelas mensais, para um objeto cujo preço a vista é de $ 63.000,00 com juros de 2,70% a.m., entrada de $ 17.000,00 e mais cinco parcelas?

Resposta: $ 9.958,43

h) Um carro está sendo vendido por $ 54.500,00 a vista. Sabendo-se que a taxa de juros é 0,89% a.m., com entrada de 40% do preço a vista e a diferença para ser paga em até 12 vezes, qual o valor das parcelas mensais?

Resposta: $ 2.885,20

i) Quanto terá um poupador que, mensalmente, depositar a importância de $ 75,50 durante 35 anos, cuja rentabilidade seja de 0,755% a.m.?

Resposta: $ 225.491,42

11.0 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO DE CAPITAL

11.1 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO PRICE - FRANCÊS

Nesse sistema, o devedor obriga-se a pagar, no fim de cada período (se postecipado) a partir da realização do empréstimo e durante um número estabelecido de períodos, uma soma ou parcela constante, igual, denominada de anuidade, com o que reembolsará o capital cedido e seus respectivos juros ou encargos.

Como o valor da prestação (anuidade) é constante e os juros incidem sobre o saldo devedor que por sua vez decresce na medida em que as prestações são pagas, estes são decrescentes e, consequentemente, as sucessivas quotas de amortização do principal são crescentes.

Abaixo, um modelo para entendimento. Antes, algumas premissas do modelo.

Hipóteses:

a) Pagamentos postecipados;

b) Não há valor residual (FV) e nem pagamento balão;

c) Qualquer recebimento de valor, como sinal ou entrada, é abatido do principal, financiando-se somente o valor líquido;

d) Série (PMT) de quatro (4) pagamentos mensais e consecutivos;

e) Taxa de juros (i) de 3,00% a.m., equivalente a 42,58% a.a.;

f) Para um valor inicial (PV) de $ 100,00

PRAZO N	PRESTAÇAO PMT	JUROS J	CAPITAL K	SALDO DEVEDOR - SD
0	0,00	0,00	0,00	100,00
1	26,90	3,00	23,90	76,10
2	26,90	2,28	24,62	51,48
3	26,90	1,54	25,36	26,12
4	26,90	0,78	26,12	0,00
SOMA	**107,60**	**7,60**	**100,00**	**0,00**

Com o algoritmo da **HP 12C**:

a) Iniciar:

Tecle	
f REG	Para limpar todos os registradores, ou;
f REG	Para limpar somente os registradores financeiros.

b) Informar:

Item	Função	Dado	Observação
1	n	4	Número de parcelas a serem pagas.
2	i	3	Taxa de juros, %, no mesmo período de "n".
3	PV CHS	- 100	Informe, preferencialmente, de forma negativa.
4	FV	0,00	Informe "0", se não houver residual.
5	PMT ⇨	**26,90**	Pressione a tecla. Aparecerá o valor da anuidade.
6	f 2		Para visualizar com duas casas decimais.

Na sequência, *SEM* efetuar qualquer outro registro na calculadora, pode-se obter a tabela Price. Acompanhe o algoritmo para tal.

c) Conferência e visualização da tabela Price:

Tecle	Visor	Interpretação
1 **f** **AMORT**	3,00	Juros da 1ª parcela.
x < > y	23,90	Capital contido na 1ª parcela.
RCL **PV**	76,10	Saldo devedor após o pagamento da 1ª parcela.
"Para o período seguinte, o 2.º, retorne na 1ª linha e prossiga a seqüência".		

11.2 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE – HAMBURGUÊS (SAC)

Este método consiste basicamente que a amortização (do capital, principal) se dá em parcelas de valores iguais, fixas por todo o período de amortização. Resumidamente, o método consiste em dividir o capital ou principal emprestado pelo número de parcelas a amortizar, a pagar. Como o saldo devedor é menor a cada novo período, pela amortização do principal, menores serão os juros devidos na parcela seguinte, resultando em parcelas decrescentes a cada novo período.

A calculadora **HP 12C** não apresenta um algoritmo de cálculo para tal sistema de amortização. Apenas utilizamos as teclas necessárias para os cálculos.

Apenas como exemplo, usaremos os mesmos dados e premissas do sistema anteriormente apresentado para elaboração da tabela de amortização.

PRAZO **N**	**CAPITAL** **K**	**JUROS** **J**	**PRESTAÇÃO** **PMT**	**SALDO DEVEDOR** **- SD**
0	0,00	0,00	0,00	100,00
1	25,00	3,00	28,00	75,00
2	25,00	2,25	27,25	50,00
3	25,00	1,50	26,50	25,00
4	25,00	0,75	25,75	0,00
SOMA	**100,00**	**7,50**	**107,50**	**0,00**

Para a elaboração da tabela SAC, considere:

Capital	Juros	Prestação	Saldo devedor
PV ÷ n	**$Sd_{n-1} . i$**	**$K_n + J_n$**	**$SD_{n-1} - K_n$**
100,00 ÷ 4	100,00(0,03)	25,00 + 3,00	100,00 – 25
25,00	3,00	28,00	75,00

Para os períodos subseqüentes, dá-se continuidade ao algoritmo acima. Para o valor de amortização do capital, o mesmo é constante para todo o período.

11.3 TABELA DE MULTIPLICADORES (recuperação de capital “n” períodos)

Para facilitar os cálculos repetitivos, elabora-se uma planilha considerando diversos prazos de amortização e diversos custos de capital (juros). Com isto, facilmente obtemos o valor da anuidade (PMT) a ser paga a cada período.

Como operacionalizá-la? Tendo o valor do empréstimo ou financiamento e, definido o prazo e a taxa de juros, multiplicamos aquele pela intercessão de “n” e “i” da tabela.

Hipóteses:

a) Pagamentos postecipados;

b) Não há valor residual e nem pagamento balão;

c) Qualquer recebimento de valor, como sinal ou entrada, é abatido do principal, financiando-se somente o valor líquido.

Prazo / N. º Parcelas	Taxa % ao mês▶	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00
	ao ano▶	42,58	51,11	60,10	69,59	79,59
1		1,030000	1,035000	1,040000	1,045000	1,050000
2		0,522611	0,526400	0,530196	0,533998	0,537805
3		0,353530	0,356934	0,360349	0,363773	0,367209
4		0,269027	0,272251	0,275490	0,278744	0,282012
5		0,218355	0,221481	0,224627	0,227792	0,230975
6		0,184598	0,187668	0,190762	0,193878	0,197017
7		0,160506	0,163544	0,166610	0,169701	0,172820
8		0,142456	0,145477	0,148528	0,151610	0,154722
9		0,128434	0,131446	0,134493	0,137574	0,140690
10		0,117231	0,120241	0,123291	0,126379	0,129505
11		0,108077	0,111092	0,114149	0,117248	0,120389
12		0,100462	0,103484	0,106552	0,109666	0,112825
13		0,094030	0,097062	0,100144	0,103275	0,106456
14		0,088526	0,091571	0,094669	0,097820	0,101024
15		0,083767	0,086825	0,089941	0,093114	0,096342
16		0,079611	0,082685	0,085820	0,089015	0,092270
17		0,075953	0,079043	0,082199	0,085418	0,088699
18		0,072709	0,075817	0,078993	0,082237	0,085546
19		0,069814	0,072940	0,076139	0,079407	0,082745
20		0,067216	0,070361	0,073582	0,076876	0,080243
21		0,064872	0,068037	0,071280	0,074601	0,077996
22		0,062747	0,065932	0,069199	0,072546	0,075971
23		0,060814	0,064019	0,067309	0,070682	0,074137
24		0,059047	0,062273	0,065587	0,068987	0,072471

Elaborando uma tabela de multiplicadores de recuperação de capital na **HP 12C**:

a) Iniciar:

Tecle	
f REG	Para limpar todos os registradores, ou;
f REG	Para limpar somente os registradores financeiros.

b) Informar:

Item	Função	Dado	Observação
1	n		Número de parcelas a serem pagas.
2	i		Taxa de juros, %, no mesmo período de “n”.
3	PV CHS		Informe, preferencialmente, de forma negativa, -1.
4	FV		Informe “0”, se não houver residual.
5	PMT ⇒		Pressione a tecla. Aparecerá o valor da anuidade.
6	f 6		Para visualizar seis casas decimais, por praxe de mercado.

BIBLIOGRAFIA

- Braga, Mário. **Curso Rápido de Matemática Financeira.** Curitiba, Paraná. UFPR. 1986.

-Carvalho, Thales Mello. **Matemática Comercial e Financeira.** Rio de Janeiro. MEC/Fename.1980.

- Dalledone Filho, Amilton; Ravedutti, Carmen Lúcia Mickosz. **Instruções Básicas de Calculadora HP 12C**. Apostila. 1987.

- Enzensberger, Hans Magnus. **O diabo dos números.** São Paulo. Cia. Das Letras. 1997.

- Guia do usuário. Hewlett-Packard Company. China. 4ª edição. 2004.

- Ifrah, Georges. **História Universal dos Algarismos.** Tomo 2. São Paulo. Editora Nova Fronteira. 1995.

- Juer, Milton. **Matemática Financeira – Aplicações no mercado de títulos.** Rio de Janeiro.,IBMEC. 1985.

- Roriz Sobrinho, Osíris Seiller. **Matemática Financeira Aplicada com Auxílio da Calculadora HP 12C.** Apostila. 1986.

- Vieira Sobrinho, José Dutra. **Manual de Aplicações Financeiras HP 12C.** São Paulo. 1ª edição. Editora Atlas. 1985.

- Waluszko, Altevir. **Apostila de Matemática Financeira.** Curitiba, Paraná. CDE-FAE. 1984.